Uitwerkingen wizEXPERT 2023

1. C $\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} = \frac{7^2 \cdot 1111^2}{5 \cdot 1111 \cdot 2 \cdot 1111} = \frac{7^2}{5 \cdot 2} = \frac{49}{10}$

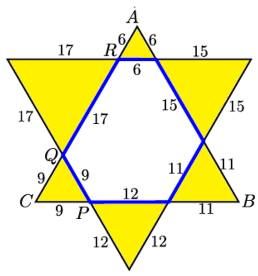
2. C Als je minstens 3 zessen (en dan nog 2 misschien andere scores), dan scoor je minstens $3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 20$ punten. Met 2 zessen lukt het wel om 19 punten te scoren, bv. $6 + 6 + 4 + 2 + 1 = 19$.

3. E De verticale stukjes van de route zijn samen gelijk aan de hoogte, de horizontale stukjes vormen samen twee keer de omtrek van de bodem. De mier legt daarom $15 + 2 \cdot 30 = 75$ cm af.

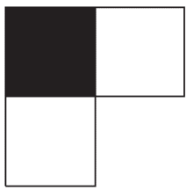
4. D Voor de bovenste baan kan Hamza kiezen uit 4 kleuren. Voor de middelste baan daarna uit 3 en vervolgens voor de onderste baan ook weer uit 3 kleuren. Dus kan Hamza de vlag op $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ manieren kleuren.

5. B Een 2-priemig getal n moet even zijn, dus is $n = 2k$ voor een zekere k. Dan heeft n in elk geval de delers 1, 2, k en n. Maar heeft alleen 1, 2 en n als delers, dus moet $k = 2$ en $n = 2 \cdot 2 = 4$. Er is daarom maar één 2-priemig getal, nl. 4.

6. B Als $x + 2y = 2^{10}$ met x en y positief, dan moet $x = 2^{10} - 2y$ even zijn en kleiner dan 2^{10}. Er zijn $\frac{2^{10}}{2} - 1 = 2^9 - 1$ mogelijke waarden voor x en bij elke dergelijke x hoort een positieve gehele y.



7. D De gele uitstekende driehoeken zijn ook allemaal gelijkzijdig en vier ervan hebben bekende zijden, zie hiernaast. Maar dan zijn alle zijden van $\triangle ABC$ te berekenen: $AB = BC = CA = 6 + 15 + 11 = 32$. Nu kun je ook $PC = PQ$ en QR berekenen: $PC = PQ = 32 - 11 - 12 = 9$ en $QR = 32 - 6 - 9 = 17$. De omtrek van de zeshoek is $6 + 15 + 11 + 12 + 9 + 17 = 70$

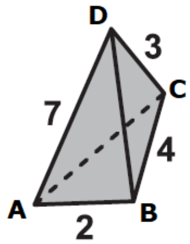


8. B In feite is het hele vierkant op te delen in de figuur hiernaast aangevuld met steeds kleinere kopieën van dat figuur. Je ziet nu direct dat $\frac{1}{3}$ deel van het vierkant zwart is met oppervlakte $\frac{1}{3} \cdot 84 = 28$.

9. E Begin met het vakje tussen de 7 en de 9. Voor dit vakje zijn er drie mogelijkheden: 2, 5 of 8, dus een 3-voud $+\,2$. . Daarna kun je telkens één leeg vakje in drie vakjes naast elkaar invullen. Er zijn nog twee mogelijkheden (3 of 6) voor het eerste vakje, twee mogelijkheden voor het vijfde vakje (1 of 4) en twee mogelijkheden voor het zesde vakje (een van de twee overgebleven (3-vouden $+\,2$). Daarna is er voor de laatste drie vakjes steeds maar één mogelijkheid. De rest kan daarom worden ingevuld op $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 24$ manieren.

10. E Elke macht van 5 eindigt op het cijfer 5, dus eindigen 5^5+1, $5^{10}+1$ en $5^{15}+1$ allemaal op een 6. $6\cdot 6\cdot 6=216$, dus eindigt $(5^5+1)(5^{10}+1)(5^{15}+1)$ ook op een 6.

11. C ABC is een driehoek, dus $BC-AB<AC<BC+AB$, ofwel $2<AC<6$. AC is geheel, dus $AC=3$, $AC=4$ of $AC=5$. Net zo vinden we in $\triangle ACD$: $4<AC<10$, zodat $AC=5$, $AC=6$, $AC=7$, $AC=8$ of $AC=9$. Uit deze twee eisen volgt $AC\ =\ 5$.
In $\triangle ABD$ is $5<BD<9$ en in $\triangle BCD$ is $1<BD<7$. Ook BD is geheel, waardoor $BD=6$. Dus $AC+BD=5+6=11$.



12. A $g!=7!\cdot 6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$, want $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=8\cdot 3\cdot 5\cdot 6=8\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 3=8\cdot 9\cdot 10$. Dus $g=10$ met cijfersom 1.

13. C A is het snijpunt van bv. de grafieken voor $a=0$ en $a=1$:
$x^3+3x^2+4=x^3+3x^2+x+6\Rightarrow x=-2$ en $y=(-2)^3+3\cdot(-2)^2+4=8$.
Dus $A=(-2{,}8)$ en de som van de coordinaten is $-2+8=6$.

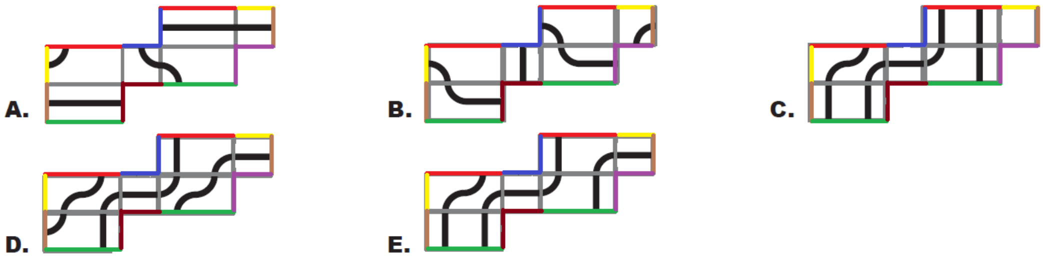
14. B $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(1+S)+(2+S)+(3+S)+(4+S)+(5+S)$,
dus $S=15+5S$, $-4S=15$, $S=\frac{15}{-4}=-\frac{15}{4}$.

15. B $|2m-2023|$ en $|2n-m|$ zijn beiden geheel en niet-negatief. Daarom is een van de twee gelijk aan 0 en de andere aan 1. Nu is 2023 oneven, zodat $|2m-2023|\neq 0$, dus is $|2n-m|=0$ en $|2m-2023|=1$: $2m-2023=\pm 1$.
Hieruit volgt $2m=2024$ of $2m=2022$, derhalve $m=1012$ of $m=1011$.
Vanwege $|2n-m|=0$ moet m echter even zijn. Er is daarom maar een oplossing: $m=1012$ en $n=506$.

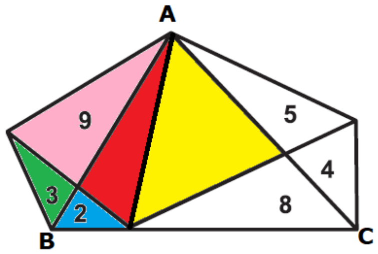
16. D Van vier dieren op een rij kunnen er maximaal twee een bever zijn, want de stukjes BBBB, BBBK, BBKB, BKBB en KBBB mogen niet in de rij staan. Van de eerste twintig dieren kunnen er daarom maximaal tien een bever zijn. Van de laatste drie dieren kunnen er geen twee bever zijn, want de einden BBB, BBK, BKB, KBB mogen niet (het met rood aangegeven dier heeft geen kangoeroe als buur). Er zitten dus maximaal elf bevers in de rij en dat kan: BKKB BKKB BKKB BKKB BKKB BKK.

17. C $5^{5^6}=5^{5\cdot 5^5}=(5^5)^{5^5}$

18. D In de figuur hieronder wordt met kleuren aangegeven welke ribben aan elkaar worden geplakt om een balk te krijgen. Je ziet nu direct dat alleen D een balk met één gesloten kromme oplevert en de rest niet.



19. C Het grijze gebied kunnen we opdelen in twee driehoeken, zie het plaatje.



De roze en de groene driehoek hebben dezelfde hoogte bij basis AB. De verhouding van de oppervlakten van beide driehoeken is $9:3 = 3:1$, dezelfde verhouding geldt daarom ook voor de twee stukken waarin AB is verdeeld. De blauwe en de rode driehoek hebben ook dezelfde hoogte bij basis AB, dus ook dezelfde verhouding voor de oppervlakten. De rode driehoek heeft daarom oppervlakte 6. Eenzelfde redenering voor de gele driehoek met basis AC geeft voor die driehoek de oppervlakte 10. Samen hebben de twee driehoeken oppervlakte $10 + 6 = 16$.

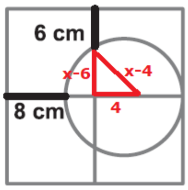
20. C Elke deler van $2^{10}3^{20}$ is ook een deler van $2^{20}3^{23}$. Elke deler van $2^{10}3^{20}$ is te schrijven als 2^a3^b met $0 \leq a \leq 10$ en $0 \leq b \leq 20$. Daarom is het aantal delers van $2^{10}3^{20}$ gelijk aan $(10 + 1)(20 + 1) = 231$. Net zo is het aantal delers van $2^{20}3^{23}$ gelijk aan 504 en dat zijn er $504 - 231 = 273$.

21. A $f(1 - x) - g(x) = x^2$, hierin x vervangen door $1 - x$ geeft
$f(x) - g(1 - x) = 1 - 2x + x^2$ of ook $2f(x) - 2g(1 - x) = 2 - 4x + 2x^2$.
Opgeteld bij $f(x) + 2g(1 - x) = x^2$ geeft dit $3f(x) = 2 - 4x + 3x^2$.
Dus $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + x^2$.

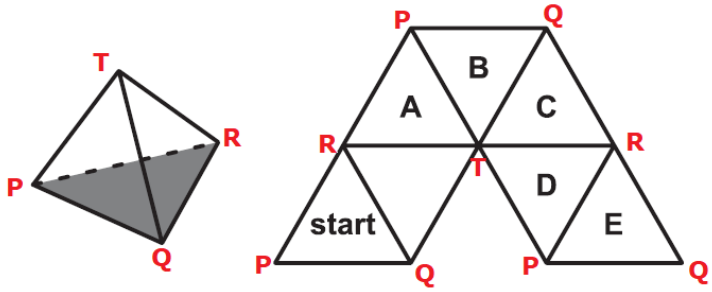
22. B Hannah scoort maximaal $1 \cdot 1 \cdot 13 = 13$ punten. De beste drie andere deelnemers worden hoogstens 2$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$ en 4$^{\text{e}}$ in de twee specialismen die Hannah heeft gewonnen en hoogstens 1$^{\text{e}}$, 2$^{\text{e}}$ en 3$^{\text{e}}$ in het derde specialisme. Zij scoren dus minstens $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3456$ punten, veel meer dan $13^3 = 2197$, zodat zij niet alle drie hooguit 13 punten kunnen hebben gescoord. Twee deelnemers kunnen wel lager scoren, bv. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ en $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ punten.

23. B De even kwadraten staan altijd één plaats boven een bocht naar links, de oneven kwadraten altijd één plaats onder een bocht naar rechts.
$625 = 25^2$, dus vormen 625, 626 en 627 een bocht naar rechts.

24. A Stel de zijde van het grote vierkant is $2x$, dan is de diameter van de cirkel gelijk aan $2x-8$ en de straal is $x-4$. Kijk nu naar de rechthoekige driehoek. Volgens de stelling van Pythagoras is dan $(x-4)^2 = 4^2 + (x-6)^2$, waaruit volgt $4x = 36$ en $2x = 18$.



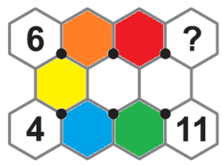
25. E Noem de hoekpunten van het grijze vlak P, Q en R en de top van het viervlak T, dan kun je zien welke zijvlakken op het bord staan tijdens het rollen, zie hieronder. Het grijze vlak staat dus op driehoek E.



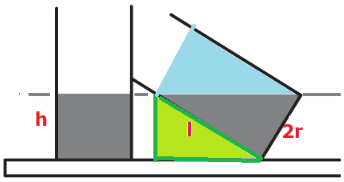
26. D Stel de (gehele) nulpunten zijn a, b, c, d en e, dan is $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) = x^5 - 11x^4 + \cdots - 7$.
Maar dan moet $-a\cdot -b\cdot -c\cdot -d\cdot -e = -7$. Nu is 7 een priemgetal is, dus moet $a = \pm 7$ en elk van b, c, d en e is ± 1.
Maar ook $-a-b-c-d-e = -11$, zodat $a = 7$ en $b = c = d = e = 1$. Dus $x^5 - 11x^4 + \cdots - 7 = (x-7)(x-1)^4$.

27. E Voor elke n is in het product $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ minstens één van de factoren deelbaar door 3, één is er deelbaar door 5 en zijn er minstens twee even, waarvan er één deelbaar is door $4 = 2^2$. De grootste gemene deler van alle getallen van de vorm $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$ is dus minstens $2^3 3^3 (2^2)^3 5^3 = 2^9 3^3 5^3$. Als we $n = 1$ invullen, dan vinden we het getal $1^3 2^3 3^3 4^4 5^3 = 2^3 3^3 (2^2)^3 5^3 = 2^9 3^3 5^3$. Dat moet dus de grootste gemene deler zijn.

28. E Kijk naar de voorste stippen in beide rijen. De gele zeshoek grenst aan beide stippen, dus moet het getal in de oranje zeshoek twee kleiner zijn dan in de blauwe zeshoek. Om een soortgelijke reden moet vervolgens het getal in de rode zeshoek twee groter zijn dan in de groene zeshoek en daarna moet het getal op de plaats van het vraagteken weer twee kleiner zijn dan 11, dus staat daar een 9.



29. D De oppervlakte van de bodem van de cilinders is $\pi r^2 = 3\pi$, dus $r = \sqrt{3}$.
Als het blauwe gedeelte in de rechtercilinder ook water zou zijn, dan zou deze cilinder twee keer zoveel water bevatten, dus $l = 2h$. De sinus van de kleinste hoek in de groene rechthoekige driehoek is daarom $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$. Deze hoek is dus $30°$. Vanwege Z-hoeken is dan ook de kleinste hoek in de grijze driehoek ook $30°$.



Maar dan is $\frac{2r}{l} = \tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus $l = \frac{2r}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = 6$ en $h = 3$.
Beide cilinders bevatten $\pi r^2 h = 3\pi \cdot 3 = 9\pi$ m^3 water.

30. C Van de zes opeenvolgende getallen zijn er drie even en is er in ieder geval één een vijfvoud. Het product is daarom een tienvoud, dus moet $b = 0$. De vier opeenvolgende cijfers zijn daarom 0, 1, 2 en 3. a, c en d zijn dan de cijfers 1, 2 en 3 in de een of andere volgorde, zodat $a + c + d = 6$.
Van de zes opeenvolgende getallen zijn er twee een drievoud. Het product is daarom deelbaar door 9, zodat de som van diens cijfers deelbaar is door 9. Dus $2a + 4b + 2c + 4d = 2a + 2c + 4d$ is deelbaar door 9, maar dan is ook $a + c + 2d$ deelbaar door 9. Elk van a, c en d is maximaal 3, dus moet $a + c + 2d = 9$. Vanwege $a + c + d = 6$ moet dan $d = 3$. (Voor de liefhebbers: $74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 = 200133133200$)