Uitwerkingen wizPROF 2019

1. **D** $20 \cdot 19 + 20 + 19 = 380 + 20 + 19 = 419$

2. **B** 6 ronden duren 6 minuten en 66 seconden, dus 7 minuten en 6 seconden.

3. **E** Kijk maar in de spiegel.

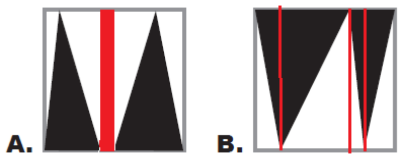
4. **C** Je gooit minimaal $1 + 1 + 1 = 3$ en maximaal $6 + 6 + 6 = 18$. Er zijn dus $18 - 2 = 16$ verschillende antwoorden: de getallen 1 tm 18 met uitzondering van de getallen 1 en 2.

5. **D** Er zijn $5 \cdot 4 = 20$ manieren.

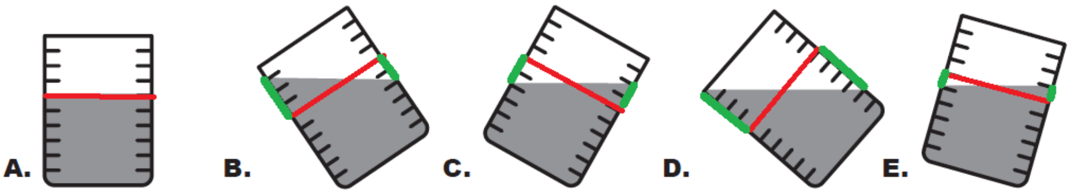
6. **D** $1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, dus 2 km is $\frac{1}{20}$ deel van de afstand. De totale afstand is dus $20 \cdot 2 = 40$ km.

7. **C** Als de lichtste kangoeroe 32 kg weegt, dan wegen de drie samen minstens $32 + 33 + 34 = 99$ kg. De lichtste kan wel 31 kg wegen: $31 + 32 + 34 = 97$.

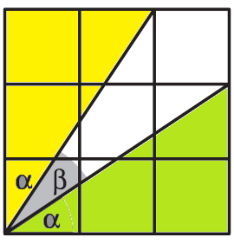
8. **A** In vierkant E is de helft zwart. Dat geldt ook voor de vierkanten B, C en D, zie bv. B hiernaast. In vierkant A is iets meer zwart vanwege de smalle rechthoek, hiernaast rood gekleurd.



9. **B** Het rechtopstaande glas is gevuld tot het vierde streepje van boven. Als we deze hoogte ook bij de andere glazen aangeven (rood), dan zien we dat bij de glazen C tm E de afwijkingen links en rechts (groen) evenveel en tegengesteld zijn, maar bij B niet.

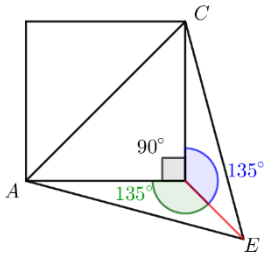


10. **E** In de figuur zijn twee gelijke driehoeken te zien (groen en geel). De ontbrekende hoek linksonder moet dus ook α zijn en je ziet direct dat $2\alpha + \beta = 90°$.



11. **B**
15728
22204
<u>19331</u>+
57263

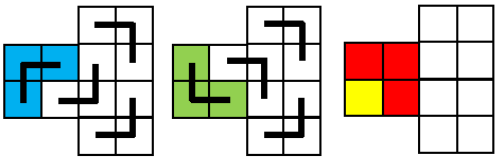
12. C



13. C Het getal $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ wordt zo klein mogelijk als je de tellers a en c zo klein mogelijk kiest en de noemers b en d zo groot mogelijk. Dit geeft twee mogelijkheden: $\frac{1}{10}+\frac{2}{9}=\frac{29}{90}$ en het iets kleinere $\frac{2}{10}+\frac{1}{9}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$.

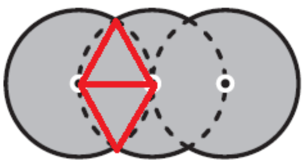
14. D De lengte en de hoogte van de vlag zijn voor een zeker getal a gelijk aan $5a$ en $3a$. De oppervlakte van de vlag is dan $5a \cdot 3a = 15a^2$, dus van iedere rechthoek is de oppervlakte $\frac{15}{4}a^2$. De hoogte van de witte rechthoek is $\frac{3a}{3}=a$, de lengte is daarom $\frac{\frac{15}{4}a^2}{a}=\frac{15}{4}a$. De lengte en de breedte verhouden zich $\frac{15}{4}a : a = \frac{15}{4} : 1 = 15 : 4$.

15. C In de linkerbovenhoek kun je op twee manieren een L neerleggen, zie hiernaast (blauw en groen). De derde manier (rood) lukt niet: het gele vakje kun je niet meer bedekken. Na de blauwe of groene L kun je de bedekking maar op één manier afmaken, zoals hiernaast is te zien. Er zijn dus twee manieren om de figuur te bedekken.



16. C $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ deel van het verdunde sap is het geconcentreerde sap. Voor 2 liter verdund sap heb je daarom $\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}$ liter geconcentreerd sap nodig. Dat is de helft van een nog half volle fles van 1 liter.

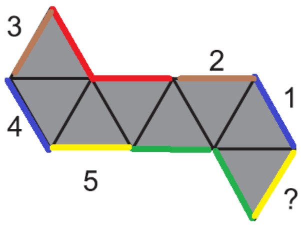
17. C Alle zijden van de rode driehoeken zijn gelijk aan de straal, dus deze driehoeken zijn gelijkzijdig en hebben daarom hoeken van $60\,°$. De onderbroken cirkelbogen horen dus bij hoeken van $2\cdot 60° = 120°$ en zijn daarom allemaal $\frac{1}{3}$ deel van een cirkel en $\frac{1}{3}\cdot 12 = 4$ lang. De omtrek van de figuur is dus gelijk aan $3\cdot 12 - 4\cdot 4 = 20$.



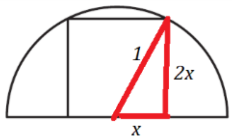
18. C De som van de cijfers is gelijk aan $3a+4b$. Het tweecijferig getal $\overline{ab}$ staat voor het getal $10a+b$ (zo is bijvoorbeeld $32 = 10\cdot 3 + 2$). Dus moet $10a+b=3a+4b$ ofwel $7a=3b$. Omdat a en b cijfers zijn kan dat alleen maar als $a=3$ en $b=7$ en dan is $a+b=10$.

19. B Omdat er in elke mand evenveel appels moeten komen, is het aantal manden een deler van 60, dus $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ of 60. Bij 12 manden heb je minstens $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 11 = 66$ peren nodig. Dat zijn er te veel, dus kun je maximaal 10 manden gebruiken. Dat lukt ook door ze te vullen met bijvoorbeeld $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ en 15 peren.

20. E De rode zijden moeten tegen elkaar komen, evenzo de groene. Daardoor moeten ook de bruine, de gele en de blauwe tegen de zijden met dezelfde kleur komen.



21. D In de rode driehoek hiernaast geldt volgens de stelling van Pythagoras $x^2 + (2x)^2 = 1$, waaruit volgt dat $x^2 = \frac{1}{5}$. De oppervlakte van het vierkant is dan $(2x)^2 = 4x^2 = \frac{4}{5}$.



22. A Noem de afstand van het verste punt tot het middelpunt x. Dan is de afstand van het andere stip tot het middelpunt gelijk aan $x - 3$. In één periode legt het verste punt een afstand van $2\pi x$ af, het andere punt een afstand van $2\pi(x - 3)$. Dus moet $2\pi x = 2\frac{1}{2} \cdot 2\pi(x - 3)$, $x = 2\frac{1}{2}(x - 3)$, $1\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$, $x = 5$.

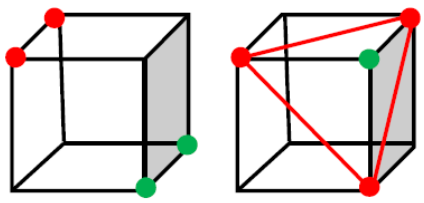
23. B Als we naar het begin van de rij kijken, dan zien we dat:

- de drievouden $+ 1$ (geel gemarkeerd) allemaal volgen op een haakje;
- de drievouden zelf (groen) allemaal voorafgaan aan een haakje;
- de drievouden $+ 2$ (rood) vanaf de 10 door de haakjes worden gesplitst;
- vanaf de 10 begint elk groepje van drie geel of eindigt het groen:

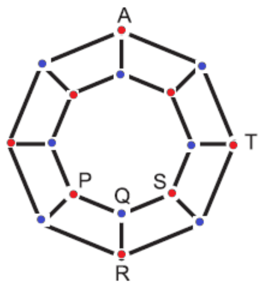
(123)(456)(789)(101)(112)(131)(415)(161)(718) ...

De getallen 22, 46, 64 en 88 zijn allemaal een drievoud $+1$, dus geel, zodat Silke de drietallen (222), (464), (646) en (888) krijgt. Het getal 44 is een drievoud $+2$, dus rood. Het viertal (444) krijgt Silke dus niet.

24. D De drie hoekpunten kunnen <u>niet</u> verbonden zijn door een zijde. In de linker figuur zie je twee rode hoekpunten die verbonden zijn door een zijde. Een derde hoekpunt moet dan in een zijvlak liggen (dat dan ook door een vierde hoekpunt gaat) of in een diagonaalvlak (maar dan gaat dat ook door een vierde hoekpunt). Als je kijkt naar twee evenwijdige zijvlakken, dan zullen er twee in één zijvlak liggen (diagonaalsgewijs) en één in het andere zijvlak. Dus liggen de drie hoekpunten als in de rechter figuur. Maar dan ligt één van de overige hoekpunten (de groene) door het vlak gescheiden van de andere overige hoekpunten. De kubus heeft acht hoekpunten, dus er zijn acht vlakken mogelijk.



25. A Kleur de hoekpunten beurtelings rood en blauw als in de figuur. Elk lijntje verbindt een rood met een blauw hoekpunt. Elke zet gaat de pion dus naar een andere kleur. Hij begint in een rood punt, daarna in een blauw, weer in een rood, weer in een blauw punt, enzovoort. Na 2019 zetten komt de pion daarom in een blauw punt en van de genoemde punten is alleen Q blauw.

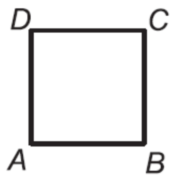


26. C Merk allereerst op c uit drie cijfers bestaat, zodat $2b + 1 = c < 1000$ en daarom $2a + 1 = b < 500$ en $a < 250$. We gaan voor de nu nog mogelijke a na wat b en c moeten worden:

a	b	c		a	b	c		a	b	c
101	203	407		151	303	607		202	405	811
111	223	447		161	323	647		212	425	851
121	243	487		171	343	687		222	445	891
131	263	527		181	363	727		232	465	931
141	283	567		191	383	767		242	485	971

Alleen de groene mogelijkheden geven een juiste a, b en c.

27. D Het getal 1 kan niet bij een hoekpunt staan: elk ander getal is immers een veelvoud van 1. Om de som zo klein mogelijk te maken zetten we 2 en 3 in de hoekpunten A en C. In de hoekpunten B en D moeten dan zo klein mogelijke veelvouden van 2 en 3 (dus van 6) komen, maar die mogen onderling geen veelvoud van elkaar zijn: $2 \cdot 6 = 12$ en $3 \cdot 6 = 18$. De kleinste som van de vier getallen is dan $2 + 3 + 12 + 18 = 35$.



28. B Schrijf alle getallen en hun product als product van priemgetallen:
$10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80 \cdot 90 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10^9$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)^9 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \cdot 7$
Als dit een kwadraat moet zijn, dan moeten alle exponenten even zijn, dus moeten we in ieder geval $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ schrappen. Het product van de overige getallen is dan $2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^9$. Als we nu nog $10 = 2 \cdot 5$ schrappen, dan is het product van de overige getallen $2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^8 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4)^2$.

29. B Noem $AD = x$. Opp.$\triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h_E = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h_E$, opp.$\triangle FDE = \frac{1}{2} \cdot FD \cdot h_E$.
Deze zijn gelijk, dus moet $FD = x$.
Opp.$\triangle FAC = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h_C = x \cdot h_C$, maar ook
opp.$\triangle FAC = 3 \cdot$ opp.$\triangle ADE = 1\frac{1}{2} \cdot x \cdot h_E$, dus $h_C = 1\frac{1}{2} h_E$.
Opp.$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_C = \frac{3}{4} \cdot AB \cdot h_E$, maar ook
opp.$\triangle ABC = 4 \cdot$ opp.$\triangle ADE = 2x \cdot h_E$, dus $\frac{3}{4} AB = 2x$, $AB = 2\frac{2}{3} x$ en $BF = \frac{2}{3} x$.
Nu weten we $AF : BD = 2x : 1\frac{2}{3} x = 2 : 1\frac{2}{3} = 6 : 5$.

30. C We schrijven zo'n getal als $\overline{abcd}$. Dan moet het getal $\overline{abc}$ een deler zijn van $\overline{abcd}$, maar $\overline{abc}$ is ook een deler van $\overline{abc0}$, dus $\overline{abc}$ is een deler van het verschil $\overline{abcd} - \overline{abc0} = d$. Dat kan alleen als $d = 0$.
De getallen die we zoeken hebben dus de vorm $\overline{abc0}$ en is het getal $\overline{ab0}$ daarvan een deler. Maar dan is $\overline{ab}$ een deler van $\overline{abc}$. $\overline{ab}$ is ook een deler van $\overline{ab0}$, dus van het verschil $\overline{abc} - \overline{ab0} = c$. Dat kan alleen als $c = 0$.
De getallen die we zoeken hebben dus de vorm $\overline{ab00}$. Maar dan zijn de getallen $\overline{a00}$ en $\overline{b00}$ delers van $\overline{ab00}$, dus de cijfers a en b zijn delers van het getal $\overline{ab} = 10a + b$. Maar dan moet a een deler zijn van b (maar dan is $b = pa$ voor een zeker getal p) en b een deler van $10a$. Dus pa is een deler van $10a$ en p een deler van 10. Daarom is $p = 1$, $p = 2$ of $p = 5$: $b = a$, $b = 2a$ of $b = 5a$ en de getallen die we zoeken waren van de vorm $\overline{ab00}$. De getallen zijn daarom 1100, 1200, 1500, 2200, 2400, 3300, 3600, 4400, 4800, 5500, 6600, 7700, 8800 en 9900. Totaal zijn dat 14 getallen.